『経済研究』（明治学院大学）第 151 号　2016 年

確率的に生成されるネットワークの規模の評価Ⅲ
—特定の次数列を満たす大規模ランダムグラフについて—

浜　口　幸　弘

1. はじめに

本稿は浜口（2014，2015）の続編に相当する。本稿では，Molloy and Reed (2000) で得られたいくつかの結果を評価するために，ランダムグラフが一定規模以上の連結部分グラフを含む可能性について，近似評価に基づくランダムウォークの視点から分析を行う。このとき，頂点のコピーの選択回数を $n^{\frac{1}{2}}$ 回までと，$n^{\frac{1}{2}}$ 回以降の 2 区間に分けて考察するものとする。本稿の主たる特徴は，選択回数 $n^{\frac{1}{2}}$ 回までにどのような特徴を持つ連結成分が生成されるかを明らかにすることにある。なお，概念および記号の定義は以前のものを参照し，必要部分のみ再び定義を示すことにする。

2. 概念の定義

最初に，Molloy and Reed (2000) による F の構成アルゴリズムを説明する。そこで，次のように各用語を定義する。頂点 v に対して，そのすべてのコピーがマッチングされているならば，v は“completely exposed (完全開示)”状態にあるといい，コピーのすべてではなく一部がマッチングされているならば，v は“partially exposed（部分開示)”状態にあるという。よって，それ以外の頂点は“unexposed（未開示)”状態にある。また，部分開示の頂点のコピーにおいて，まだマッチングされていないコピーを“open”状態にあるという。この定義のもと F の構成アルゴリズムは以下のとおりである。

F の構成アルゴリズム

1. 各頂点 v に対して，その次数分 $\deg(v)$ 個のコピーを作り，全体のコピーの集合を L とする。
2. L の要素が尽きるまで以下の手続きを繰り返す。
   (a) L の任意の要素 1 つを選択し，次に，その対となるもう 1 つの要素を L からランダムに選択する。そして，これら 2 つの要素（マッチング対）を L から除外する。
   (b) 部分開示の頂点がある限り以下の手続きを繰り返す。尽きれば（a）に戻る。

部分開示にある頂点のオープンコピーを選択し（ランダムでなくてもよい），その対となる要素を L からランダムに選択する。そして，これら 2 つの要素（マッチング対）を L から除外する。

このアルゴリズムによれば，1 つの連結成分（component）が完成してから，次の新たな連結成分の構成に取り掛かることになる（手続き 2 (a) に戻る）。

以下では，浜口（2014，2015）と同様にグラフが次数 1 と次数 $t(\geq 3)$ の頂点から構成される場合について考察を行う。Molloy and Reed（2000）の連結成分の大きさを決める評価基準 $Q(\boldsymbol{D})$ を適用すれば，$Q(\boldsymbol{D}) = -\lambda_1 + t(t-2)\lambda_t > 0$ であるから，$-\lambda_1 + t(t-2)\lambda_t = \alpha$ とすれば（$\alpha > 0$），λ_i の定義によって，$t(t-2)d_t(n) = d_1(n) + \alpha n$ である。$d_1(n) + d_t(n) = n$ を考えれば，以下の式を得る（簡単のため整数をとるものとし，以降では，$d_1 = d_1(n)$ および $d_t = d_t(n)$ と記す）。

$$d_1 = \frac{t(t-2)-\alpha}{(t-1)^2} n \quad , \quad d_t = \frac{\alpha+1}{(t-1)^2} n$$

このとき初期状態におけるコピーの数は，次数 1 と次数 t の頂点について，それぞれ d_1 および td_t となる。また，次数 t の頂点のコピーを選択する確率を p とし，次数 1 の頂点のコピーを選択する確率を q とすると，以下の関係式が成り立つ。

$$p = \frac{td_t}{d_1 + td_t} = \frac{(\alpha+1)t}{t(t-1+\alpha)-\alpha} \quad , \quad q = \frac{d_1}{d_1 + td_t} = \frac{t(t-2)-\alpha}{t(t-1+\alpha)-\alpha}$$

さて，第 i（$i \geq 0$）回目の試行の結果，部分開示の頂点を含む連結成分（1 つ存在）に含まれるオープンコピーの総数を確率変数 S_i とし，新たに追加されるオープンコピーの数を確率変数 X_i とする。このとき，前述のアルゴリズムは以下のように定式化できる。

$$X_0 = t$$

$$X_i = \begin{cases} t-2 & : L \text{ から次数 } t \text{ の未開示な頂点のコピーを選択する場合} \\ -1 & : L \text{ から次数 1 の未開示な頂点のコピーを選択する場合} \\ -2 & : L \text{ から部分開示にある頂点のオープンコピーを選択する場合} \end{cases}$$

$$S_i = X_0 + X_1 + \cdots + X_i \quad (i \geq 1)$$

ただし，S_i が 0 になった時点でその連結成分の生成は完了し，次のコピーの選択から新しい連結成分の生成が開始される。

3. ランダムグラフの生成

本稿で対象にするグラフの生成プロセスの期間を以下のように 2 つに分けて考える。

まず，コピーの選択回数 i が $1 \leq i \leq \sigma n^{\frac{1}{2}-\delta}$ の場合を考える。ただし，$0<\delta<1$ および $\sigma = \sigma(n)$ とし，$\sigma(n) \to \infty$ かつ $\sigma = o(n^{\delta})$ とする。この区間における頂点コピー選択の特徴を示すために，$\sigma n^{\frac{1}{2}-\delta}$ 回の試行において L から未開示な頂点のコピーを継続して選択する確率を P とすると，次のように評価できる。

$$P \geq \left(\frac{d_1 + td_t - t}{d_1 + td_t}\right)\left(\frac{d_1 + td_t - 2t}{d_1 + td_t}\right)\cdots\left(\frac{d_1 + td_t - \sigma n^{\frac{1}{2}-\delta} t}{d_1 + td_t}\right) \geq \left(\frac{d_1 + td_t - \sigma n^{\frac{1}{2}-\delta} t}{d_1 + td_t}\right)^{\sigma n^{\frac{1}{2}-\delta}}$$

$$= \left(1 - \frac{t\sigma n^{\frac{1}{2}-\delta}}{d_1 + td_t}\right)^{\sigma n^{\frac{1}{2}-\delta}} \geq \left(1 - \frac{\sigma n^{\frac{1}{2}-\delta}}{an}\right)^{\sigma n^{\frac{1}{2}-\delta}} = \left(1 - \frac{\sigma}{an^{\frac{1}{2}+\delta}}\right)^{\sigma n^{\frac{1}{2}-\delta}} \longrightarrow 1$$

ただし，$a = \dfrac{d_1 + td_t}{tn}$（定数）

よって，ほとんどすべてのランダムグラフにおいて，2個のオープンコピーのマッチングは行われない。またこの区間では，$\sigma n^{\frac{1}{2}-\delta}/n = o(1/n^{\frac{1}{2}})$ となるから，任意の時点において次数 t と次数1の頂点のコピーをそれぞれ選択する確率は，$p + o(1/n^{\frac{1}{2}})$ および $q + o(1/n^{\frac{1}{2}})$ である。このとき，当区間における頂点コピーの選択は次のような試行と見なせる。

$X_0 = t$

$$X_i = \begin{cases} t-2 & ：L\text{ から次数 }t\text{ の未開示な頂点のコピーを選択する場合} \\ -1 & ：L\text{ から次数 }1\text{ の未開示な頂点のコピーを選択する場合} \end{cases}$$

$S_i = X_0 + X_1 + \cdots + X_i \quad (i \geq 1)$

そこで，k 回までの試行において，$S_1 \geq 1$，…，$S_{k-1} \geq 1$，$S_k = 0$ となるような試行の組の総数を近似評価する。まず，最初の状態 t から出発して，途中 S_i（$1 \leq i \leq k-1$）が0以下になる場合も含めて，$S_k = 0$ となるすべての場合の数を $N_k(t, 0)$ と記す（試行は k 回まで継続して行う）。次に，j（$1 \leq j \leq k$）回目の試行において初めて $S_j = 0$ となり，最終的に $S_k = 0$ となるすべての場合の数を $N_k^j(t, 0)$ と記す。

さて，S_j が0になるならば，ある正の整数 i を用いて，$j = (t-1)i + 1$ と表され，逆に，$j = (t-1)i + 1$ と表されるならば，$S_j = 0$ となる。よって，$k = (t-1)m + 1$ とすると，以下のような漸化式が成り立つ。

$$N_k(t, 0) = \sum_{i=1}^{m} N_k^{(t-1)i+1}(t, 0)\binom{(t-1)(m-i)}{m-i}$$

この式から帰納的に $N_k^k(t, 0)$ の大きさを評価することも考えられるが，かなり複雑な計算を要するので，より簡潔な評価が得られる命題1のような不等式を導く。

命題1

整数 $i \geq 1$ に対して，以下の不等式が成り立つ。

$$(t-1)^{i-1} \leq N_{(t-1)i+1}^{(t-1)i+1}(t, 0) \leq N_{(t-1)i+1}(t, 0) = \binom{(t-1)i+1}{i-1}$$

証明

S_j が0になるのは，ある正の整数 i を用いて，$j = (t-1)i + 1$ と表される場合に限られる。このとき，L から次数 t の未開示な頂点のコピーを選択する回数は $i-1$ であり，次数1の未開示な頂点のコピーを選択する回数は $(t-2)i + 2$ である。よって，$N_{(t-1)i+1}(t, 0)$ は以下のように表せる。

$$N_{(t-1)i+1}(t,0)=\binom{(t-1)i+1}{i-1}$$

ここで明らかに，$N^{(t-1)i+1}_{(t-1)i+1}(t,0)\leq N_{(t-1)i+1}(t,0)$ である。

次に，$N^{(t-1)i+1}_{(t-1)i+1}(t,0)$ と $N^{(t-1)(i-1)+1}_{(t-1)(i-1)+1}(t,0)$ の関係を考える。$(t-1)(i-1)+1$ 回目の試行で初めてオープンコピーの数が 0 になる場合は，$(t-1)(i-2)+1$ 回目の試行でオープンコピーの数が $t-1$ 個になる状態 P を常に経由し，その後，ただ 1 通りの一連の試行を経てオープンコピーの数が 0 になることを意味する（P に至る途中でオープンコピーの数は 0 にならないものとする）。一方，$(t-1)i+1$ 回の試行で初めてオープンコピーの数が 0 になる場合は，P を経由する $t-1$ 通りの場合と P を経由しない場合に分けられる。したがって，以下の不等式を得る。

$$(t-1)N^{(t-1)(i-1)+1}_{(t-1)(i-1)+1}(t,0)\leq N^{(t-1)i+1}_{(t-1)i+1}(t,0)$$

よって，主張にある以下の不等式を得る。

$$(t-1)^{i-1}\leq N^{(t-1)i+1}_{(t-1)i+1}(t,0) \qquad \square$$

この命題を用いて，$N^{(t-1)i+1}_{(t-1)i+1}(t,0)$ の大きさを考えるとき，上界の方は以下のように評価できる。

$$N_{(t-1)i+1}(t,0)=\binom{(t-1)i+1}{i-1}\leq\left(e\frac{(t-1)i+1}{i-1}\right)^{i-1}$$

これは下界と同じ次数になるので，それほど粗い近似ではないと考えられる。

次に，$(t-1)i+1$（$1\leq i\leq m$）回目の試行において初めてオープンコピーの数が 0 になる確率を $P(S_1\geq 1,\ \cdots,\ S_{(t-1)i}\geq 1,\ S_{(t-1)i+1}=0)$ と記す。ここで命題 1 を利用して，$\sum_{i=1}^{m}P(S_1\geq 1,\ \cdots,\ S_{(t-1)i}\geq 1,\ S_{(t-1)i+1}=0)$ の大きさを評価すると，以下の命題 2 が得られる。

命題 2

$(t-1)m+1=n^{\frac{1}{2}-\delta}$ とする。このとき，$pq^{t-2}\leq\dfrac{1}{e(t-1)^2}$ かつ $q<\dfrac{t-2}{t-1}$ が満たされるならば，ほとんどすべてのグラフにおいて，以下の不等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{m}P(S_1\geq 1,\cdots,S_{(t-1)i}\geq 1,S_{(t-1)i+1}=0)<\frac{3}{e^2}$$

証明

当区間の任意の時点において，次数 t と次数 1 の頂点のコピーをそれぞれ選択する確率は，$p+o(1/n^{\frac{1}{2}})$ および $q+o(1/n^{\frac{1}{2}})$ である。そこで n を十分大きくとって固定し，オープンコピーの総数 S_i をできる限り小さくするように，当区間における次数 t の頂点コピーを選択する最小の確率を，当区間での次数 t の頂点コピーを選択する確率 p' とし，それに対応する次数 1 の頂点コピーを選択する確率を q' として主張を検討する。同様に，この考え方を繰り返せば，$n\to\infty$ のとき $p'\to p$ および $q'\to q$ となる。よって，主張を検討するうえで各コピーを選択する確率は，一定値 p および q と見なすことができる。このとき各確率変数 X_i は互いに独立であり，同じ分布をする。この考え方に基づいて以下のように証明を試みる。

まず，$\sum_{i=1}^{m}P(S_1\geq 1,\ \cdots,\ S_{(t-1)i}\geq 1,\ S_{(t-1)i+1}=0)$ における最初の 3 つの項は，以下のように近似せず

に求める。

$$P(S_1 \ge 1, \cdots, S_{t-1} \ge 1, S_t = 0) = q^t$$

$$P(S_1 \ge 1, \cdots, S_{2t-2} \ge 1,\ S_{2t-1} = 0) = tpq^{2t-2}$$

$$P(S_1 \ge 1, \cdots, S_{3t-3} \ge 1, S_{3t-2} = 0) = \frac{3t(t-1)}{2} p^2 q^{3t-4}$$

次に，第4項以降を考えるために，命題1から以下の不等式を得る。なお，最後の不等式は $i \ge 4$ から導かれる。

$$N_{(t-1)i+1}(t,0) = \binom{(t-1)i+1}{i-1} \le \left(e\frac{(t-1)i+1}{i-1}\right)^{i-1} \le \left(\frac{3e(t-1)}{2}\right)^{i-1}$$

よって，$pq^{t-2} \le \dfrac{1}{e(t-1)^2}$ を用いれば，

$$\sum_{i=1}^{m} P(S_1 \ge 1, \cdots, S_{(t-1)i} \ge 1, S_{(t-1)i+1} = 0)$$

$$\le q^t + tpq^{2t-2} + \frac{3t(t-1)}{2} p^2 q^{3t-4} + \sum_{i=4}^{m} \binom{(t-1)i+1}{i-1} p^{i-1} q^{(t-2)i+2}$$

$$\le q^t + tpq^{2t-2} + \frac{3t(t-1)}{2} p^2 q^{3t-4} + \sum_{i=4}^{m} \left(\frac{3e(t-1)}{2}\right)^{i-1} p^{i-1} q^{(t-2)i+2}$$

$$\le q^t + tpq^{2t-2} + \frac{3t(t-1)}{2} p^2 q^{3t-4} + \frac{\left(\dfrac{3e(t-1)}{2}\right)^3 p^3 q^{4t-6}}{1 - \dfrac{3e(t-1)}{2} pq^{t-2}}$$

ここで，$f(q) = pq^{t-2} = (1-q)q^{t-2}$ とすると，$q = \dfrac{t-2}{t-1}$ のとき，$f(q)$ は極大である（区間 $\left(0, \dfrac{t-2}{t-1}\right)$ において，$f(q)$ は単調増加)。そこで β を $f(\beta) = \dfrac{1}{e(t-1)^2}$ かつ $0 < \beta < \dfrac{t-2}{t-1}$ を満たす数とすると，$pq^{t-2} \le \dfrac{1}{e(t-1)^2}$ かつ $q < \dfrac{t-2}{t-1}$ により，$q \le \beta$ となる。なお，$\dfrac{1}{e(t-1)^2} < f\left(\dfrac{t-2}{t-1}\right)$ である。ここで，$f\left(1-\dfrac{2}{t}\right) > \dfrac{1}{e(t-1)^2}$ となるから，$\beta < 1 - \dfrac{2}{t}$ であり，以下の不等式を得る。

$$q^t \le \beta^t < \left(1 - \frac{2}{t}\right)^t < \frac{1}{e^2}$$

このことから，前述の不等式の結果を用いて，以下を得る。

$$\sum_{i=1}^{m} P(S_1 \ge 1, \cdots, S_{(t-1)i} \ge 1, S_{(t-1)i+1} = 0)$$

$$\le \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2}\left(\frac{t}{e(t-1)^2} + \frac{3t(t-1)}{2}\frac{1}{(e(t-1)^2)^2} + \left(\frac{3e(t-1)}{2}\right)^3 \frac{1}{(e(t-1)^2)^3} \frac{1}{1 - \dfrac{3}{2(t-1)}}\right) < \frac{3}{e^2} \qquad \square$$

この結果から，$n \to \infty$ のとき，$\sum_{i=1}^{m} P(S_1 \ge 1, \cdots, S_{(t-1)i} \ge 1, S_{(t-1)i+1} = 0)$ は1に近づかないことが保

障される。また，証明において第 4 項以降さらに数項の確率を正確に求めれば，仮定 $pq^{t-2} \leq \frac{1}{e(t-1)^2}$ および $q < \frac{t-2}{t-1}$ を緩くできる可能性を持つ。さて，命題 2 および de Moivre–Laplace の定理（本稿では Alon and Spencer（2004）を参照）を用いて以下の命題 3 が得られる。

命題 3

$(t-1)m+1 = n^{\frac{1}{2}-\delta}$ とする。また，$k = n^{\frac{1}{2}-\delta}$ とする。このとき，$pq^{t-2} \leq \frac{1}{e(t-1)^2}$ かつ $q < \frac{t-2}{t-1}$ が満たされるならば，コピーの選択を $n^{\frac{1}{2}}$ 回行うと，ほとんどすべてのグラフにおいて，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，オープンコピーの数が区間（$(1-\varepsilon)\mu_X - \varepsilon k,\ (1+\varepsilon)\mu_X + \varepsilon k$）に入るような連結成分が少なくとも 1 つ生成される。

証明

前述の試行において，$Y_i = \frac{X_i+1}{t-1}$ とすれば，これは Y_i を確率変数とするベルヌーイの試行となる。そこで，$X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ および $Y = \sum_{i=1}^{k} Y_i$ とする。このとき，Y は $B(k,p)$ の 2 項分布となる。X の平均と標準偏差をそれぞれ μ_X および σ_X とし，Y のそれらをそれぞれ μ_Y および σ_Y とすれば，以下を得る。

$$\mu_X = ((t-1)p-1)k\,,\ \mu_Y = kp\,,\ {\sigma_X}^2 = kpq(t-1)^2\,,\ {\sigma_Y}^2 = kpq$$

ここで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$c_\varepsilon = min\left[-\ln\left(e^{\varepsilon}(1+\varepsilon)^{-(1+\varepsilon)}\right), \frac{\varepsilon^2}{2}\right]$ とすると, 以下の不等式を得る。

$$P\left(|X-\mu_X| > \varepsilon(\mu_X+k)\right) < 2e^{-c_\varepsilon \frac{\mu_X+k}{t-1}}$$

よって，$P\left(|X-\mu_X| > \varepsilon(\mu_X+k)\right) = o(1)$ を得る。ここで，$0<\delta<1$ および $\sigma=\sigma(n)$ であり，$\sigma(n) \to \infty$ かつ $\sigma = o(n^{\delta})$ に注意する。そして最大 k 回の試行を計 σ 回行うとする。このとき事象 $A_i(1 \leq i \leq \sigma)$ を，k 回または k 回以前にオープンコピーの数が 0 になる試行あるいは k 回目にオープンコピーの数が区間（$(1-\varepsilon)\mu_X - \varepsilon k\,,\ (1+\varepsilon)\mu_X + \varepsilon k$）の範囲外になる試行から構成される集合と定義する。このとき，$\sigma n^{\frac{1}{2}-\delta}/n = o(1)$ だから，次数 t の頂点のコピーおよび次数 1 の頂点のコピーを選択するそれぞれの確率 p と q は，σ 回試行を繰り返しても近似的に一定である。よって，命題 2 および上述の確率の評価式から以下の式が成り立つ。

$$P(A_1 \wedge \cdots \wedge A_\sigma) \sim \prod_{i=1} P(A_i) \leq \left(\frac{3}{e^2} + o(1)\right)^{\sigma} \to 0$$

すなわち，$P(\overline{A_1} \vee \cdots \vee \overline{A_\sigma}) \to 1$ となるので主張を得る。　□

次に，コピーの選択回数 i が $n^{\frac{1}{2}-\delta} \leq i \leq \frac{n}{\tau}$ の場合を考える。ただし，$\tau = \tau(n)$ とし，$\tau(n) \to \infty$ かつ $\tau = o(n)$ とする。また，$k = n^{\frac{1}{2}-\delta}$ とおき，$j = i - k$ とする。命題 3 から $\mu_X = \frac{\alpha(t-1)}{t+\alpha} k$ となるので，前述のようにランダムウォークに準ずる方法で考えると，コピーの選択プロセスは以下のような確率変数で表される。

$$X_k = \frac{\alpha(t-1)}{t+\alpha} k$$

$$X_{k+j}=\begin{cases} t-2 & ：L\text{から次数}\,t\,\text{の未開示な頂点のコピーを選択する場合} \\ -1 & ：L\text{から次数}\,1\,\text{の未開示な頂点のコピーを選択する場合} \\ -2 & ：L\text{から部分開示にある頂点のオープンコピーを選択する場合} \end{cases}$$

$$S_k(j)=X_k+X_{k+1}+\cdots+X_{k+j} \quad (j\geq 1)$$

ここで，この区間では，$(n/\tau)/n=o(1)$ となるから，任意の時点で L から次数 t の未開示な頂点のコピーを選択する確率は $p+o(1)$ であり，また，L から次数1の未開示な頂点のコピーを選択する確率は $q+o(1)$ であり，L から部分開示にある頂点のオープンコピーを選択する確率は高々 $\frac{c}{\tau}$ である（c は正の定数)。このとき命題2の証明にある考え方に基づけば，$n\to\infty$ のとき，確率変数 X_{k+j} に関する確率は，前述のそれぞれの試行に対して，p, q および0とできる。よって各 X_{k+j} は独立であり，同じ確率分布をすると見なせる。そして平均と分散は次のようになる。

$$E\left(X_{k+j}\right)\sim(t-1)p-1,\quad E\left(\left(X_{k+j}-E\left(X_{k+j}\right)\right)^2\right)\sim pq(t-1)^2$$

ここで，$a=X_k$ および $m=\frac{n}{\tau}$ とおいて，$\sum_{j=a}^{m}P(S_k(1)\geq 1,\cdots,\ S_k(j-1)\geq 1,\ S_k(j)=0)$ を考える（$j<a$ のときは，$S_k(j)>0$ となるので考慮の必要なし)。中心極限定理によれば，$n\to\infty$ のとき，$X_{k+1}+\cdots+X_{k+j}$ $(j\geq a)$ の分布は正規分布に近づくので，ほとんどすべてのグラフではオープンコピーの数は $S_k(j)$ の平均値，すなわち $a+\frac{\alpha(t-1)}{t+\alpha}j$ 付近に収まることになる。よって，$\sum_{j=a}^{m}P(S_k(1)\geq 1,\cdots,\ S_k(j-1)\geq 1,\ S_k(j)=0)\to 0$ となる。このことから，ほとんどすべてのグラフにおいて，コピーの選択回数 i が $\frac{n}{\tau}$ 付近では，オープンコピーの数はほぼ $\frac{\alpha(t-1)}{t+\alpha}\frac{n}{\tau}$ である。すなわち，連結成分の大きさは少なくとも $\frac{\alpha}{t+\alpha}\frac{n}{\tau}$ となる。

以上の分析から，Molloy and Reed(2000）による特定の次数列を満たすランダムグラフの構成アルゴリズムにおいては，コピーの選択回数が n のオーダーより小さいとき，特に $n^{\frac{1}{2}}$ 回までにおいて，ある1つの連結成分のオープンコピーが次々に生成されてその頂点数を増し，n のオーダーになってからは頂点数の増加とともにオープンコピー間でのマッチングが行われ始めるということが導かれる。

4. 課題

次回はグラフの連結性（connectivity）の視点から考察を行う予定である。

参考文献

Alon, N. and Spencer, J.H. “*The Probabilistic Method*”, 2nd ed. Wiley-Interscience (2004)
Molloy, M. and Reed, B. “A Critical Point for Random Graphs with a Given Degree Sequence”, *citeseerx. ist.*

psu. edu（2000）

Molloy, M and Reed, B, "The Size of the Largest Component of a Random Graph on a Fixed Degree Sequence", *Combinatorics, Probability and Computing* 7, 295–306（1998）

Molloy, M and Reed, B, "A Critical Point for Random Graphs with a Given Degree Sequence", *Random Structures and Algorithms* 6, 161–180（1995）

浜口幸弘，確率的に生成されるネットワークの規模の評価Ⅰ—特定の次数列を満たす大規模ランダムグラフについて—，明治学院大学経済研究 147（2014）

浜口幸弘，確率的に生成されるネットワークの規模の評価Ⅱ—特定の次数列を満たす大規模ランダムグラフについて—，明治学院大学経済研究 148（2015）