明治学院大学

E 弦理論の Nekrasov 型公式の証明について

酒　井　一　博

概要

E 弦理論のプレポテンシャルをあらわに表す Nekrasov 型公式の予想がある。この予想は制限された場合に証明されており，その拡張として一般の場合にも証明が試みられたが，不完全であった。本小論ではこの証明を完成させるべく，不足部分を補う。

1．はじめに

現代の素粒子物理学は場の理論を基礎としている。素粒子間の現象は，場の理論を数学的に解くことで説明できる。しかし実はこれが難しい。相互作用が弱い場合の近似計算の手法は約半世紀も前に確立したが，一般の状況下で場の理論を自由自在に解けるようになったとは言い難く，場の理論の全貌の解明に向けた取り組みが，現在も理論家の間で続けられている。

場の理論の性質の解明にあたっては，まずは超対称性を持つ場の理論（超対称場の理論）を調べるのがよい。超対称場の理論では，ボゾン（光子のようにいくつも同じ状態に重ね合わせられる粒子）とフェルミオン（電子のように 2 つ以上同じ状態に重ね合わせられない粒子）が対になって存在し，これにより理論の性質が数学的に調べやすくなる。さらに，超対称場の理論については，個々の理論（模型）を単体で理解するよりも，様々な超対称場の理論の総体を一括して理

解する方が，かえって見通しが良くなる，ということが近年明らかになってきた。矛盾のない超対称場の理論が存在できる時空は最大で 6 次元である。6 次元理論の空間の一部を小さく丸めることで，5 次元以下の様々な理論を再現できる。よって超対称場の理論の総体の理解は，6 次元理論から始めるのがよい。

6 次元超対称場の理論に限ってみても，その種類は無限個あることが知られている。しかしながら，化学においてあらゆる化合物が限られた種類の原子から出来ているように，無限個の 6 次元超対称場の理論も，限られた種類の理論の組み合わせとして構成できることが近年明らかになった(1)。特に，「原子」同士をつなぐ「電子」に相当する，最も基本的な 6 次元超対称場の理論が存在する。この理論は E 弦理論として知られている(2)(3)。

一般に，場の理論を含む物理学の模型において，その全貌を捉える上での土台となるのが分配関数である。分配関数はその理論にどのような励起状態があるかという情報をすべて含んでいる。超対称性のある理論においては，分配関数の概念を拡張したものとして，超対称指数が定義できる。一般に超対称指数は以下のように定義される：

$$I(\boldsymbol{\mu}) = \mathrm{Tr}(-1)^F e^{i\sum_a \mu_a J_a}. \tag{1.1}$$

ここで，Tr は理論に現れるすべての状態に関する和を表す。$(-1)^F$ の因子はボゾンとフェルミオンとで符号を逆にして足し上げることを表す（これを入れないで足し上げたものが分配関数である）。J_a は理論の持つ大域的対称性のチャージ（電荷を一般化したもの）を表し，μ_a は J_a に対する化学ポテンシャル（パラメータ）である。4 次元で 2 種類の超対称性を持つ（$\mathcal{N}=2$ と表記される）理論，あるいは 5 次元や 6 次元で最小の超対称性を持つ理論においては，超対称指数を一定の手続きで簡素化したプレポテンシャルと呼ばれる正則関数が定義できる。プレポテンシャルは理論の 4 次元低エネルギー有効作用を与えることもあり，理論の性質を調べる上での最も基本的な関数に位置付けられる。

本小論では，6 次元 E 弦理論のプレポテンシャルをあらわに表す公式の予想の証明について述べる。この公式は論文[4][5]で予想され，制限された場合については論文[6]で証明が与えられた。その後，一般の場合について，論文[7]で証明の大筋が示されたが，核心の部分が欠落していた。そこでこの欠落箇所を補い，証明を完成させるのが本小論の目的である。

2．E 弦理論の Seiberg-Witten 曲線とプレポテンシャル

プレポテンシャルの厳密な決定は，1994 年 Seiberg と Witten により，4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称 SU(2) ゲージ理論の場合に初めて行われた[8]。ただし，彼らはプレポテンシャルを閉じた形であらわに書き下したのではなく，媒介変数表示の形で与えた。具体的には，プレポテンシャル（の 1 階微分）及びプレポテンシャルの引数を，媒介変数に依存する補助的な代数曲線の周期積分として表した。この補助的な代数曲線は現在では Seiberg-Witten 曲線と呼ばれる。超対称場の理論において，Seiberg-Witten 曲線の決定はプレポテンシャルの決定と概ね同義である。（正確には Seiberg-Witten 曲線に加えて Seiberg-Witten differential と呼ばれるものを与える必要があるが，多くの場合に後者は前者から比較的簡単に予想できる。）

E 弦理論の Seiberg-Witten 曲線は論文[9][10]において決定された。ここでは，より整理された Seiberg-Witten 曲線の形[11]，及びこれに基づくプレポテンシャルの媒介変数表示を簡単に紹介しておこう。

E 弦理論（正確には 6 次元 E 弦理論の余剰空間次元を 2 次元トーラス T^2 にコンパクト化した時の低エネルギー4 次元理論）の Seiberg-Witten 曲線は次の形の楕円曲線で与えられる：

$$y^2 = 4x^3 - fx - g, \tag{2.1}$$

$$f=\sum_{k=0}^{4}a_k u^{4-k},\qquad g=\sum_{k=0}^{6}b_k u^{6-k}. \tag{2.2}$$

このように，曲線は媒介変数 u（モジュライ空間の座標）に依存する。係数 a_k，b_k は余剰次元方向の T^2 のモジュラス τ と E 弦理論の持つ大域的 E_8 対称性の化学ポテンシャル $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_8)$ の関数である。例えば a_k，b_k $(k\leq 2)$ は以下のように与えられる（全ての a_k，b_k の具体形については論文[11]参照）：

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{E_4}{12}, & a_1&=0, & a_2&=\frac{6}{E_4\Delta}\left(-E_4A_2+A_1^2\right),\\
b_0&=\frac{E_6}{216}, & b_1&=-\frac{4}{E_4}A_1, & b_2&=\frac{5}{6E_4^2\Delta}\left(E_4^2B_2-E_6A_1^2\right).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで，$\Delta:=\eta^{24}=(E_4^3-E_6^2)/1728$ であり，$\eta(\tau)$ は Dedekind のエータ関数，$E_{2n}(\tau)$ は重み $2n$ の Eisenstein 級数である。A_k，B_k は E_8 型 Weyl 群の対称性を持つ，指数 k の Jacobi 形式であり，具体的には

$$\begin{aligned}
A_1(\tau,\boldsymbol{\mu})&=\Theta(\tau,\boldsymbol{\mu}),\\
A_2(\tau,\boldsymbol{\mu})&=\frac{8}{9}\left[\Theta(2\tau,2\boldsymbol{\mu})+\frac{1}{2^4}\Theta\left(\frac{\tau}{2},\boldsymbol{\mu}\right)+\frac{1}{2^4}\Theta\left(\frac{\tau+1}{2},\boldsymbol{\mu}\right)\right],\\
B_2(\tau,\boldsymbol{\mu})&=\frac{32}{5}\left[e_1\Theta(2\tau,2\boldsymbol{\mu})+\frac{1}{2^4}e_3\Theta\left(\frac{\tau}{2},\boldsymbol{\mu}\right)+\frac{1}{2^4}e_2\Theta\left(\frac{\tau+1}{2},\boldsymbol{\mu}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

などと表される[11]。ここで

$$\Theta(\tau,\boldsymbol{\mu}):=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\prod_{j=1}^{8}\vartheta_k(\mu_j,\tau) \tag{2.5}$$

は E_8 格子の古典テータ関数であり，e_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ は

$$e_1:=\frac{1}{12}\left(\vartheta_3^4+\vartheta_4^4\right),\quad e_2:=\frac{1}{12}\left(\vartheta_2^4-\vartheta_4^4\right),\quad e_3:=\frac{1}{12}\left(-\vartheta_2^4-\vartheta_3^4\right) \tag{2.6}$$

と定義される。（ϑ_k は $\vartheta_k(0,\ \tau)$ を表す。）$\vartheta_k(z,\ \tau)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は Jacobi テータ関数である。

さて，上述の Seiberg-Witten 曲線を用いて，E 弦理論のプレポテンシャル F_0（φ，τ，μ）を，媒介変数表示で間接的に表すことができる。具体的には，

上述の Seiberg-Witten 曲線を

$$y^2 = 4x^3 - \frac{1}{12}\frac{E_4(\tilde{\tau})}{\omega^4}x - \frac{1}{216}\frac{E_6(\tilde{\tau})}{\omega^6} \tag{2.7}$$

の形に書き表す。すなわち，この式が上述の Seiberg-Witten 曲線を再現するように $\omega(u,\ \tau,\ \mu)$，$\tilde{\tau}(u,\ \tau,\ \mu)$ を定める。ω，$\tilde{\tau}$ は，例えば $1/u$ の級数展開の形で表すことができる。これらを用いると，プレポテンシャルは次式で決定される（積分定数の不定性は，ここでは本質的ではない）：

$$\partial_u \varphi = \frac{i}{2\pi}\omega, \tag{2.8}$$
$$\partial_\varphi^2 F_0 = 8\pi^3 i(\tilde{\tau} - \tau). \tag{2.9}$$

ここから媒介変数 u を消去することで，プレポテンシャル $F_0(\varphi,\ \tau,\ \mu)$ を $e^{2\pi i\varphi}$ の級数展開の形で求めることができる。

3．E弦理論のプレポテンシャルの Nekrasov 型公式の予想

Seiberg-Witten 理論はプレポテンシャルを厳密に決定する画期的な理論であったが，プレポテンシャルの表示は上で見たようにあくまで間接的であった。これに対し，Nekrasov は局所化の手法を用いることで，4次元 $\mathcal{N}=2$ 及び5次元 $\mathcal{N}=1$ の超対称 U(n) ゲージ理論のプレポテンシャルを閉じた形であらわに表すことに成功した(12)。E弦理論のプレポテンシャルに対して，これと類似の公式を予想したのが論文(4)(5)である。正確には，E_8 対称性の化学ポテンシャルを

$$\boldsymbol{\mu} = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_1, m_2, m_3, m_4) \tag{3.1}$$

に制限した時のプレポテンシャルに対して，以下のような Nekrasov 型公式の予想形が書き下された：

$$F_0 = (2\hbar^2 \ln Z)\big|_{\hbar=0}\,, \tag{3.2}$$

$$Z = \sum_{\boldsymbol{R}} \left(-e^{2\pi i\varphi}\right)^{|\boldsymbol{R}|} \prod_{k,l=1}^{4} \prod_{(i,j)\in R_k} \prod_{\pm} \frac{\vartheta_1\left(\omega_k \pm m_l + (j-i)\hbar, \tau\right)}{\vartheta_1\left(\omega_k - \omega_l + h_{kl}(i,j)\hbar, \tau\right)}, \tag{3.3}$$

ただし

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \pi, \quad \omega_3 = -\pi - \tau, \quad \omega_4 = \pi\tau. \tag{3.4}$$

ここで $\boldsymbol{R} = (R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4)$ は 4 つの分割の組であり，分割 R_k は非負整数の非増加数列

$$R_k = \{\nu_{k,1} \geq \nu_{k,2} \geq \cdots \geq \nu_{k,\ell(R_k)} > \nu_{k,\ell(R_k)+1} = \nu_{k,\ell(R_k)+2} = \cdots = 0\} \tag{3.5}$$

（すなわち Young 図）である。（$\ell(R_k)$ は零でない $\nu_{k,i}$ の個数を表す。）$\boldsymbol{R}$ に関する和は（空の分割を含めた）あらゆる分割の組み合わせすべてにわたって取る。$|\boldsymbol{R}| := \sum_{k=1}^{4} \sum_{i=1}^{\infty} \nu_{k,i}$ は分割のサイズの合計である。また，R_k の共役（転置）の分割を $R_k^{\vee} = \{\nu_{k,1}^{\vee} \geq \nu_{k,2}^{\vee} \geq \cdots\}$ と表すことにする。このとき

$$h_{kl}(i,j) := \nu_{k,i} + \nu_{l,j}^{\vee} - i - j + 1 \tag{3.6}$$

は 2 つの分割 R_k, R_l 間に定義される，座標 $(i,\ j)$ における相対フック長である。

この公式は $e^{2\pi i\varphi}$ による級数展開の形で 10 次と，十分高次まで検証されてはいたが(5)，より厳密な証明が待たれていた。

4．証明の概略

上で紹介した Nekrasov 型公式の証明は，まずパラメータの値を $m_j = 0$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ に制限した簡単な場合に行われた(6)。m_j が一般の場合にも，基本的な方針としては同様の道筋を辿ればよい。論文(6)では，$m_j = 0$ の場合の Nekrasov

型表式の熱力学極限$\hbar \to 0$を計算した結果，最終的に鞍点方程式の解に付随するスペクトル曲線として，$m_j=0$の場合の Seiberg-Witten 曲線

$$y^2 = 4x^3 - \frac{1}{12}E_4u^4x - \frac{1}{216}E_6u^6 + 4u^5 \tag{4.1}$$

が現れた。これに対し，m_jが一般の場合に同様の議論を行うと，上の曲線の代わりに

$$y^2 = 4x^3 - \frac{1}{12}E_4u^4x - \frac{1}{216}E_6u^6 + 4u^5 \prod_{j=1}^{4}\left[\frac{\vartheta_1(m_j,\tau)^2}{\eta^6}\left(\frac{x}{u^2} - \wp(m_j)\right)\right] \tag{4.2}$$

という形の曲線が得られる。ここで$\wp(z)$は2π，$2\pi\tau$を基本周期とする Weierstrass のペー関数である。この曲線と既知の Seiberg-Witten 曲線が本質的に同一であることを示すことが証明の核心部分であるが，論文[7]ではその具体的な記述が欠落していた。これを明らかにしたのが，本小論の主要な成果である。それを以下に示す。

方程式（4.2）は変数x，yに関して見れば，

$$y^2 = \sum_{k=0}^{4} c_k(u)x^{4-k} \tag{4.3}$$

という形の 4 次楕円曲線である。また係数$c_k(u)$が必ずしもuの多項式になっていない。したがって，一見すると既知の Seiberg-Witten 曲線（2.1）－（2.3）とは大きく異なっている。しかしながら，初等的な代数計算により，（4.3）の形の 4 次楕円曲線と 3 次楕円曲線

$$\begin{aligned} y^2 = 4x^3 &- \left(c_0c_4 - \frac{c_1c_3}{4} + \frac{c_2^2}{12}\right)x \\ &- \left(\frac{c_0c_2c_4}{6} - \frac{c_0c_3^2}{16} + \frac{c_1c_2c_3}{48} - \frac{c_1^2c_4}{16} - \frac{c_2^3}{216}\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

とは同一の判別式を持つことが容易に確かめられる。すなわち，曲線（4.3）と（4.4）は本質的に等価である。（実は二つの曲線間の写像を具体的に書き表すことも

できるが，繁雑になるためここでは省略する。）そこで（4.2）と（4.3）を比較して得られる c_k の具体形を用いて曲線（4.4）を書き表し，座標 u の適切な再定義

$$u \to u - u_0 \tag{4.5}$$

を行うと，結果は既知のE弦理論のSeiberg-Witten曲線（2.1）−（2.3）に（3.1）を代入したものとぴたりと一致する！具体的に u_0 は，（2.2），（2.3）にあるように最終的なSeiberg-Witten曲線の u^3x の係数が $a_1=0$ となるよう定めればよく，

$$u_0 = \frac{1}{2\eta^{12}E_4}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_4}\prod_{j=1}^{4}\vartheta_j(m_{\sigma(j)},\tau)^2 \tag{4.6}$$

と求まる。ここで σ は {1，2，3，4} の置換を表し，和はすべての置換にわたって取る。

以上の部分を補うことで，本質的な意味において証明が完成する。より厳密な証明のためには，Seiberg-Witten曲線だけでなく，周期積分の一致まで示す必要があるが，それらを含めた詳細については，機会を改めて報告したい。

謝辞

本研究は，日本学術振興会科学研究費補助金（課題番号26400257），日本学術振興会二国間交流事業（ハンガリーとの共同研究，ロシアとの共同研究）の助成を受けたものである。

参考文献

（1） J. J. Heckman, D. R. Morrison, T. Rudelius and C. Vafa, Fortsch. Phys. 63 (2015) 468 [arXiv:1502.05405 [hep-th]].
（2） O. J. Ganor and A. Hanany, Nucl. Phys. B 474 (1996) 122 [hep-th/9602120].
（3） N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B 471 (1996) 121 [hep-th/9603003].
（4） K. Sakai, JHEP 1206 (2012) 027 [arXiv:1203.2921 [hep-th]].

(5) K. Sakai, JHEP 1209 (2012) 077 [arXiv:1207.5739 [hep-th]].
(6) T. Ishii and K. Sakai, JHEP 1402 (2014) 087 [arXiv:1312.1050 [hep-th]].
(7) T. Ishii, PTEP 2015 (2015) no.8, 083B01 [arXiv:1506.05582 [hep-th]].
(8) N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B 426 (1994) 19 Erratum: [Nucl. Phys. B 430 (1994) 485] [hep-th/9407087].
(9) O. J. Ganor, D. R. Morrison and N. Seiberg, Nucl. Phys. B 487 (1997) 93 [hepth/9610251].
(10) T. Eguchi and K. Sakai, JHEP 0205 (2002) 058 [hep-th/0203025].
(11) K. Sakai, arXiv:1111.3967 [hep-th].
(12) N. A. Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. 7 (2003) no. 5, 831 [hep-th/0206161].